

# COURS DE THÉORIE DES JEUX 2

Luc Collard & Corinne Fantoni  
UFR STAPS Paris Descartes

## 2. TROUVER LA SOLUTION. Maximin et Minimax.

Prenons le cas du dopage sportif. Une situation sportive acceptant le dopage ressemblerait à la matrice qui suit. Si, ni moi ni mon adversaire ne nous dopons, nous obtenons un indice de satisfaction de 3 pour chacun (case nord ouest de la matrice suivante, le premier chiffre entre crochets correspondant au score du joueur ligne, le second au score du joueur colonne), ce qui est assez satisfaisant mais inférieur au score de 5 si je me dope et que mon adversaire ne se dope pas (la victoire est alors plus facile et mon adversaire est le grand perdant qui obtient 0). Par contre, mon adversaire et moi n'obtenons chacun que 1 si nous nous dopons tous les deux (car si l'égalité des chances est reproduite nous nous sommes ici dopés pour rien). Alors que faire ?

Le Dopage	Joueur 2	
	Non Dopé	Dopé
Joueur 1	Non Dopé	[3,3]
	Dopé	[5,0]

Le Maximin et le Minimax sont deux façons de résoudre les dilemmes de la sorte. Elles ont été développées par John Von Neumann.

- (i) Le Maximin est le Maximum du Minimum de satisfaction au cas où le pire arriverait. C'est la tactique du moindre mal : la prudence absolue. Mettons nous dans la peau du joueur 1. Si je ne me dope pas (Non Dopé), j'aurai – selon ce que jouera Joueur 2 – soit 3, soit 0. Le pire entre 0 et 3 est 0. Si maintenant je me dope (Dopé), j'aurai 5 ou 1, le pire étant 1. Le Maximin consiste à jouer le mieux du pire, entre 0 si je ne me dope pas et 1 si je me dope : la réponse est 1. On l'écrit :  $\text{Max}(0, 1) = 1$ . Pour obtenir 1, je dois me doper. Être prudent à ce jeu consiste à se doper !
- (ii) Le Minimax c'est rendre Minimum le Maximum de ce que l'autre peut faire. On joue empathique et paranoïaque, en anticipant les coups bas de l'autre. Mettons nous encore du point de vue de Joueur 1. Si Joueur 2 ne se dope pas, au mieux j'aurai 5 et au pire 3. Si joueur 2 se dope, au mieux j'aurai 1, au pire 0. Pour obtenir le Minimax, je fais comme si l'autre aller faire en sorte de me priver du meilleur ; je choisis alors le minimum de ces deux maximums (entre 5 et 1). On écrit,  $\text{Min}(5, 1) = 1$ . À nouveau, pour obtenir 1, il vaut mieux me doper. Jouer Minimax, c'est se doper. Remarquons que lorsque Maximin = Minimax (ce qui est le cas ici), et que c'est une solution du jeu (1, 1), (Dopé, Dopé) on dit qu'il y a un « point de selle » (ou col).

Dans la précédente matrice opposant les nageurs, le Maximin (-1) est aussi le Minimax (-1). Pour les obtenir, il convient de jouer *Surface*. Mais si les deux joueurs jouent *Surface*, ils obtiennent chacun mieux que ce qu'ils cherchaient (0)...

Bien que façon de résoudre logiquement un jeu, les Maximin et Minimax peuvent vite avouer leurs faiblesses lorsque le jeu devient « déficient ». Imaginons le cas suivant. Afin de motiver ses élèves de 5<sup>ème</sup> à répéter des séries de 25 mètres, départ plongé dans différentes techniques de nage, un professeur d'EPS leur propose le jeu suivant : « Vous

êtes 23 dans la classe, vous allez chacun vous opposer tour à tour aux 22 autres. Le départ se fait au coup de sifflet ; votre adversaire devant à chaque fois partir du côté opposé de la piscine (de 25 mètres) dans la même ligne d'eau ». « Ce n'est pas juste ! » s'écrie une élève : « Nous les filles nous sommes sûres de perdre ; et il y a même des garçons qui font du club... ». « Ne vous inquiétez pas, répond le professeur, les 25 mètres ne sont pas chronométrés. À chaque traversée, vous remporterez un certain nombre de points selon la nage utilisée. Laissez-moi vous expliquer. Les nageurs qui partent du côté des plots de départ sont les nageurs 1, ceux qui partent du côté opposé sont les nageurs 2. Imaginons que vous soyez un nageur 1. Si votre nage est le crawl et que votre adversaire (le nageur 2) utilise la brasse, vous obtenez 3 points et lui seulement 1, peu importe qui arrive le premier. Si vous utilisez une nage type brasse et que le nageur 2 fait de même, il gagne 4 points et vous seulement 1. Reportez vous à la matrice des gains. Elle expose les 4 cas de figures possibles. Ainsi, ce n'est pas le meilleur nageur qui va gagner mais le plus stratège. Attention : il est interdit de changer de nage au cours de la traversée et n'oubliez pas de nager bien à droite de votre ligne d'eau pour ne pas percuter votre adversaire venant d'en face ». Quelle forme de nage, le professeur d'EPS risque d'observer le plus ?

Le combat des nages		Nageur 2	
		Crawl	Brasse
Nageur 1	Crawl	2, 3	3, 1
	Brasse	4, 2	1, 4

La dissymétrie des scores oblige cette fois-ci à traiter le cas des deux nageurs.

- Pour le Nageur 1. Son Maximin est  $\text{Max}(1, 2) = 2$  consistant à jouer Crawl. Son Minimax est  $\text{Min}(3, 4) = 3$  consistant à jouer également Crawl.
- Pour le Nageur 2. Son Maximin est  $\text{Max}(1, 2) = 2$  et son Minimax est  $\text{Min}(3, 4) = 3$ , tous deux consistant à jouer Crawl, comme pour le Joueur 1. Apparemment la solution est facile. Tout le monde gagne à jouer Crawl et le Professeur d'EPS devrait voir cela. Cependant, mieux vaut alors ne pas être dans la peau du joueur 1 : il a 2 quand l'autre a 3. L'injustice est source de rancune. Le Nageur 1 peut très bien compter sur la rationalité de Nageur 2 et jouer Brasse. Il obtient alors 4 (case sud ouest). Anticipant cette anticipation, Nageur 2 peut lui aussi passer en Brasse où il obtiendrait alors 4 (case sud est). Dans cette expectative, anticipant cette anticipation d'anticipation, Nageur 1 finit par jouer Crawl, ce qui l'amène à 3 (case nord est). Il n'y a plus au Nageur 2 qu'à flairer le coup pour se mettre au Crawl à son tour et revenir à la situation initiale (nord ouest). Un cercle vicieux s'installe et ni le Minimax, ni le Maximin ne donnent de garanties.