COURS DE THÉORIE DES JEUX 3

Luc Collard & Corinne Fantoni
UFR STAPS Paris Descartes

3. L'ÉQUILIBRE DE NASH.
Un homme d'exception.

Du remarquable livre de Sylvia Nasar est tiré le non moins remarquable film hollywoodien : *A beautiful mind* (Un homme d'exception) qui relate la vie du plus célèbre théoricien des jeux : j'ai nommé John Nash (interprété à l'écran par Russel Crow). John Nash est l'étudiant torturé et schizophrène de John Von Neumann. Il sera interné pendant plus de 20 ans après avoir péniblement publié deux papiers et une thèse en 23 pages… de qualité ! Il sortira de l'hôpital prix Nobel, pour avoir notamment trouvé une façon « équilibrée » (contrastant avec sa personnalité) de résoudre n'importe quel jeu et n'importe quel dilemme : « tout jeu admet au moins un équilibre de Nash ». Et là où son professeur s'était cassé le nez avec ses Minimax et Maximin, Nash lui va trouver une façon imparable de solutionner les jeux.

Reprenons l'exemple du film – qui décrit le moment où Nash aurait eu son inspiration (John Nash a participé à la confection du long métrage ; il est mort l'été 2015 d'un accident de taxi). Il est reclus dans le bar des étudiants, cherchant désespérément son sujet de thèse « original ». Trois de ses amis (en fait il n'en avait pas vraiment ; c'était la « tête de Turc » de sa promotion tant ses comportements étaient socialement inappropriés) le rejoignent. Du fond du bar émergent cinq superbes filles, dont une beauté parfaite. Le jeu des garçons consiste d'abord à se défier pour savoir « qui va se la faire » : chacun pour soi et Dieu pour tous ! John Nash arrête net les spéculations et prétend qu'il vient de comprendre « la dynamique de l'univers »… Rien que ça !

Si les garçons misent sur la plus jolie, ils se concurrencent et se font obstruction. La proie va leur échapper. À défaut, ils risquent de se rabattre sur les quatre autres moins jolies ; mais personne n'aime être un deuxième choix et les quatre moins belles vont les rejeter. Par contre, si personne n'attaque la plus jolie, si tout le monde drague immédiatement les filles imparfaites, elles se sentiront aimées : « c'est la seule façon de s'en faire une chacun ».

À la différence du Maximin et du Minimax, l'équilibre de Nash prend en compte simultanément les intérêts de tous les joueurs. On ne peut plus prendre le point de vue du joueur ligne isolément… Cette différence est capitale. L'équilibre de Nash est tel qu'aucun des joueurs n'a intérêt à changer de tactique (ou de stratégie, voir la différence plus loin) si l'autre maintient la sienne.

Voici la formalisation de ce jeu : +1 signifie « s'en faire une » et « -1 » : « se prendre un râteau ».

Le jeu des filles		Autres joueurs	
		Belle	Très belle
Joueur 1	Belle	+1 +1	-1,+1
	Très belle	+1,-1	-1,-1

On voit vite qu'il n'y a ni Minimax, ni Maximin à ce jeu (on ne peut choisir entre +1 et +1, ou entre -1 et -1). Pour trouver l'équilibre de Nash, tel qu'aucun des joueurs n'a intérêt à changer de choix unilatéralement, regardons case par case. La case sud est : personne n'a intérêt à rentrer seul dans sa chambre (-1, -1) : ce n'est pas un équilibre de Nash. Les cases sud ouest et nord est : l'un des deux est content (+1 : il se fait la très belle) ; mais les autres font grise mine. Ces derniers ont même intérêt à emmener le concurrent chanceux dans leur déchéance – ne serait-ce que pour montrer qu'en telle situation, le moteur est la jalousie. Il reste une case : nord ouest. Tout le monde ramène une fille dans sa chambre (+1). C'est un équilibre de Nash. Les quatre étudiants ne peuvent être tentés de changer unilatéralement de tactique pour obtenir le +1 avec la plus jolie, car ils retomberaient dans le cas inégalitaire précédent, vecteur de vengeance.

En théorie des jeux, « tactique » et « stratégie » ont des sens bien différenciés. La tactique correspond à un choix (depuis le début, nous proposons des matrices à 2 tactiques), une décision : jouer coulée ou surface, se doper ou ne pas se doper, jouer crawl ou jouer brasse, draguer la très jolie fille ou une des autres. Et choisir l'une ou l'autre. Nous allons à présent envisager la résolution sur le mode stratégique, ce qu'autorise l'équilibre de Nash. Une stratégie est un ensemble de choix, une agrégation de tactiques. Cela se présente lorsque le jeu est répété un certain nombre de fois. On peut alors distribuer les choix sur une échelle de probabilités allant de 0 à 1 (0% à 100%). La résolution sous forme stratégique porte le nom de résolution en « stratégie mixte » - par opposition à la résolution du jeu sous l'angle tactique (sur un coup), qui porte le nom de « stratégie pure ». Autrement dit, une stratégie mixte est une distribution de probabilités sur l'ensemble des stratégies pures.

Prenons l'exemple suivant qui est censé décrire la matrice de satisfaction d'un jeu quelconque. Qu'observe-t-on ? Il n'y a pas de Maximin ni de Minimax… Mais en se penchant sur chaque case, on s'aperçoit qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash non plus. Du moins en stratégie pure. Car nous l'avons dit : tout jeu accepte au moins un équilibre de Nash. Nous allons le trouver en recourant aux probabilités (résolution en stratégie mixte, le jeu étant répété).

Jeu quelconque		Joueur 2	
		Tactique A	Tactique B
Joueur 1	Tactique A	+1 -1	-1,+1
	Tactique B	-1,+1	+1,-1

Si *p* est la probabilité du Joueur 2 (colonne) de jouer la Tactique A, alors, l'espérance de gain du joueur ligne (Joueur 1) est :
S'il joue Tactique A, $Ej1siA = 1*p + [-1*(1 - p)]$
S'il joue Tactique B, $Ej1siB = -1*p + [1*(1 - p)]$
L'idée de génie de Nash va être de poser Ej1siA = Ej1siB. Car en effet, si tel est le cas (espérance de gains équivalente pour J1 s'il joue A ou B), alors le Joueur 1 n'aura aucun intérêt à changer de stratégie, si l'autre maintient la sienne, c'est-à-dire si Joueur 2 joue Tactique A avec la probabilité *p.* En mettant à parité ses deux équations à une seule inconnue (*p*), on trouve :
$1*p + [-1*(1 - p)] = -1*p + [1*(1 - p)]$, et en faisant passer les *p* à gauche du « = » et les chiffres à droite, on obtient par réduction : $p = ½$. Autrement dit, si Joueur 2 joue 1 fois sur 2 Tactique A et 1 fois sur 2 Tactique 2, moi Joueur 1, je m'y retrouve : je veux que J2 joue avec ces probabilités et, compte tenu de la symétrie des pay off (scores) de la matrice J2 souhaitera aussi que je joue Tactique 1 avec une probabilité d'½, et par voie de conséquence, Tactique 2 avec ½. En remplaçant ½ dans l'équation Ej1siA (ou Ej1siB, ce qui revient au même puisque l'on a posé qu'elles étaient égales), on trouve Ej1 = 0, c'est moins bien que +1 mais mieux que -1. C'est la position d'équilibre en stratégie mixte.

Illustrons l'équilibre de Nash en stratégie mixte de façon plus concrète. Le cas du tir au penalty. Palacios-Huerta (2003) analyse 1417 tirs au plus haut niveau. Il vient la matrice suivante où en ligne on a les buts marqués (point de vue du tireur en %) et en colonne les buts arrêtés (point de vue du gardien en %).

Les tirs au penalty		Gardien	
		Gauche	Droit
Tireur	Gauche	58, 42	95, 5
	Droit	93, 7	70, 30

La cage de 7 mètres 32 du gardien étant à 11 mètres du point de pénalty, les shoots à 130 km/h de moyenne (de ce niveau là) mettent 0,3 seconde pour franchir la ligne. Le gardien n'a pas le temps de prendre sa décision de plonger à gauche ou à droite après avoir vu le tir partir. Il doit plonger en aveugle. Il y a deux tactiques : Gauche et Droite – précisons que, pour simplifier, le Gauche du gardien est en fait à sa droite, c'est la gauche du tireur qui fait référence. Si l'on fait la moyenne des pourcentages des 4 cases, il vient 79% de chance de marquer pour les Tireurs (et 21% de chance d'arrêter pour les Gardiens). La problématique est : faut-il plus souvent tirer à gauche ou à droite ? Et avec quelle fréquence ? Le gardien doit-il plonger plus souvent à gauche ou à droite ? Et à quelle fréquence ?

Nash peut répondre à cela. Si p est la probabilité du Gardien de jouer Gauche, alors l'espérance de gain du Tireur est :
S'il joue Gauche, EtireursiG = $58*p + [95*(1 - p)]$
S'il joue Droit, EtireursiD = $93*p + [70*(1 - p)]$
En posant : $58*p + [95*(1 - p)] = 93*p + [70*(1 - p)]$, il vient $p = 25/60 = 0{,}42$ (42%) qui est la probabilité avec laquelle le Gardien devrait jouer Gauche (cela correspond pour lui à plonger à sa droite). Et par voie de conséquence, le Gardien devrait jouer Droit dans 58% des cas (100% moins 42%) Ce qui permettrait au Tireur et au Gardien de trouver leur équilibre (le mieux qu'ils puissent attendre avec l'assurance que ni l'un, ni l'autre ne gagneront plus en s'écartant de cet équilibre unilatéralement).

De même, si q est la probabilité du Tireur de jouer Gauche. Alors, l'espérance de gain du Gardien est :
S'il joue Gauche, EgardiensiG = $42*q + [7*(1 - q)]$
S'il joue Droit, EgardiensiD = $5*q + [30*(1 - q)]$
En posant : $42*q + [7*(1 - q)] = 5*q + [30*(1 - q)]$, il vient $q = 23/60 = 0{,}38$ qui est la probabilité avec laquelle le Tireur devrait tirer à gauche.
Le bilan de l'entraîneur : pour le Tireur, shooter environ 6 fois sur 10 côté droit (100% moins 38%) ; et le gardien, plonger du même côté presque aussi souvent (58%). Ce qui est incroyable est que ce pronostic de Nash s'observe dans la réalité. Sans avoir eu de cours de théorie des jeux, les champions se révèlent *Nashiens* ! C'est dire la « robustesse » de cette façon de résoudre les jeux. Privilégier le côté droit tient sans doute à la latéralité des joueurs (plus souvent droitiers) : shooter le pied ouvert accroit la précision du tireur ; quant au gardien, plonger à sa droite se fait par impulsion essentielle du pied gauche (le pied d'appel des vrais droitiers)…